

Образовательный минимум по алгебре

**Тема: Алгебраические выражения**

**Порядок выполнения арифметических действий**

Сложение и вычитание - действия первой степени

Умножение и деление - действия второй степени.

Возведение в степень – действия третьей степени.

- Если выражение не содержит скобок, действия начинают выполнять с действий третьей степени, затем, второй и, затем, третьей. Действия одной степени выполняют в том порядке, в каком они записаны.
- Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия в скобках, а затем все остальные, соблюдая все правила предыдущего пункта.
- Если вычисляется значение дроби, то сначала вычисляется значение числителя и знаменателя, а потом первое делится на второе.
- Если выражение содержит скобки внутри других скобок, то сначала выполняются действия во внутренних скобках

**Законы действий.**

	Переместительный	Сочетательный	Распределительный
Сложение	$a + b = b + a$	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Умножение	$a \cdot b = b \cdot a$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	
Кроме этого: $a + 0 = 0 + a = a$ ; $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ; $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ ; $a - b = a + (-b)$ ; $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$			

**Правила раскрытия скобок.**

Если перед скобками стоит знак (+), то знаки в скобках не меняются:

$$a + (b - c) = a + b - c; \quad 3a + (2c - 5k) = 3a + 2c - 5k; \quad 5a + 4(3c - 2b) = 5a + 12c - 8b$$

Если перед скобками стоит знак (-), то знаки в скобках меняются на противоположные:  $a - (b + c) =$

$$a - b - c; \quad a - (b - c) = a - b + c; \quad 3a - (5c + k) = 3a - 5c - k;$$

$$4a - (5k - 3c + a) = 4a - 5k + 3c - a; \quad 5a - 4(3c - 2b) = 5a - 12c + 8b$$

## Практические задания

1. Вычислите:

а)  $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$ ; б)  $-4,5 - 2\frac{1}{2}$ ; в)  $-1,2 \cdot (-0,4)$ ; г)  $\frac{1\frac{3}{5}}{-5\frac{1}{3}}$ .

2. Найдите значение выражения:  $(3x - 5)y$ , если  $x = 2$ ,  $y = -8$ .

3. Составьте выражение по условию задачи:

Мастер изготавливает детали в час, а его ученик – на 7 деталей меньше. Сколько деталей они изготавливают вместе, если мастер работал 6ч, а его ученик – 4ч ?

4. Из равенства  $S = v \cdot t + l$  выразите  $t$ .

5. Определите порядок действий.

$$\frac{\left(1,75 \cdot \frac{2}{5} + 1,75 : 1\right) \cdot 1\frac{5}{7}}{\left(\frac{17}{40} - 0,325\right) : \frac{1}{5} \cdot 0,4}$$

### Тема: Уравнения с одним неизвестным.

Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется **уравнением**.

**Корнем уравнения** называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство.

**Решить уравнение** – значит найти все его корни или установить, что их нет.

### Основные свойства уравнений.

1	Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то его корни не изменятся.
2	Если обе части уравнения умножить на одно и то же (не равное нулю) число, то его корни не изменятся.

### Алгоритм решения уравнения с одним неизвестным.

$8x - 9 - (4x - 5) = 12x + (4 + 5x)$	
1	$8x - 9 - 4x + 5 = 12x + 4 + 5x$ Раскрыть скобки (знаки!)
2	$8x - 4x - 12x - 5x = 4 + 9 - 5$ Перенести неизвестные в одну часть уравнения, а известные в другую. (знаки!)
3	$8x - 4x - 12x - 5x = 4 + 9 - 5$ Привести подобные слагаемые
4	$-13x = 8$ Решить простейшее уравнение, разделив число на коэффициент.
5	$x = -\frac{8}{13}$ Записать ответ

## Практические задания

1. Решите уравнение: а)  $9x = \frac{2}{5}$ ; б)  $-\frac{1}{2}x = 3$ ; в)  $-10x = -0,5$ ; г)  $(7x + 1) - (9x + 3) = 5$ ; д)  $5(x - 3) - 2(2x + 7) = 8$ ; е)  $\frac{3x}{5} = \frac{6+x}{3}$ .

2. От села до города легковая машина доехала за 2ч, а грузовая – за 5ч. Найдите скорость каждой машины, если скорость грузовика на 48 км/ч меньше скорости легковой машины.

3. Одна сторона треугольника в 2 раза меньше второй и на 2 см меньше третьей. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 10см

## Тема: Одночлены и многочлены.

### 1. Степень и её свойства.

**Определение:**  $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ .  $a^1 = a$ ,  $a^0 = 1$ ,

n – раз

1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	4	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
2	$a^n : a^m = a^{n-m}$	5	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ , $b \neq 0$
3	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$		

2. **Стандартный вид числа.** Каждое число, модуль которого больше 10, можно записать в виде  $a \cdot 10^n$ , где  $1 \leq |a| < 10$

Пример:  $457 = 4,57 \cdot 10^2$ .

3. **Одночленом** называется произведение числовых и буквенных множителей.

4. **Коэффициентом** называется числовой множитель одночлена.

5. **Чтобы одночлен записать в стандартном виде, нужно:**

- 1) Перемножить числовые множители и их произведение поставить на первое место;
- 2) Перемножить степени с одинаковыми основаниями и полученное произведение поставить после числового множителя.

Пример:  $6a^2c^5a^3 = 10a^4c^5$ .

6. **Многочленом** называется алгебраическая сумма нескольких одночленов.

7. **Подобными слагаемыми** называются одночлены, у которых одинаковая буквенная часть.

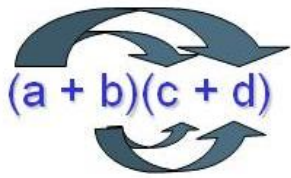
8. **Привести подобные слагаемые** значит выполнить действия с коэффициентами, а буквенную часть оставить неизменной.

9. **Чтобы умножить одночлен на многочлен**, нужно одночлен умножить на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

$$2x \cdot (3x + 2) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 2 = 6x^2 + 4x$$

$$a(b + c - d) = ab + ac - ad$$

10. **Чтобы умножить многочлен на многочлен** нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.



$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

11. Чтобы разделить многочлен на одночлен нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

$$(5mn - 0,4mc) : 2m = 2,5n - 0,2c$$

### Практические задания

1. Выполнить простейшие действия со степенью

- 1)  $a^3 \cdot a^5$ ;
- 2)  $5^{21} : 5^{19}$ ;
- 3)  $(a^8)^5$ ;
- 4)  $\frac{(a^5)^3 \cdot a^6}{a^{20}}$ ;
- 5)  $(a^2 \cdot b)^3$ ;
- 6)  $5^4 \cdot 7^4$ ;
- 7)  $\frac{16^2 3^5}{12^4}$ .

2. Выполнить простейшие действия с одночленами и многочленами

- |  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| 8) $(2p)(-3c^2)$ ;                             | 16) $6n(2t - 3n) - 3t(3t - 2n)$ ; |
| 9) $(-\frac{3}{2}a^3xy^3)(\frac{3}{4}ax^2y)$ ; | 17) $(a + 2)(a + 3)$ ;            |
| 10) $(3b^2)^4$ ;                               | 18) $(a - 10)(-a - 2)$ ;          |
| 11) $(-3x^2y^4)^3$ ;                           | 19) $(-6x) : (2x)$ ;              |
| 12) $2(3a^2 - 4a + 8)$ ;                       | 20) $(10pq) : (6q)$ ;             |
| 13) $7ab(2a + 3b)$ ;                           | 21) $(12a + 6) : 3$ ;             |
| 14) $5a^2b(15b + 3)$ ;                         | 22) $(4x^2 - 3xy) : x$ ;          |
| 15) $7(4x + 3) - 6(5 + 7x)$ ;                  |                                   |

3. Привести подобные слагаемые в многочлене

- 23)  $11x^2 + 4x - x^2 - 4x$ ;
- 24)  $x^2 + 3y^2 + 4x^2 - y^2$ ;
- 25)  $(13x - 11y) - (-15x + 10y)$ ;

4. Упростить выражения

- 26)  $5x - (2x - 3y)$ ;
- 27)  $(x - 3)x - (4 - x) + 3x$ ;
- 28)  $(3b + c^2 - d) - (c^2 - 2d)$ ;
- 29)  $P + Q$ , если  $P = 5a^2 + b$ ,  $Q = -4a^2 - b$

## Тема: Разложение многочлена на множители.

1. **Разложить многочлен на множители**, значит представить его в виде произведения нескольких одночленов и многочленов.
2. **Способы разложения на множители:**
  - а) вынесение за скобки общего множителя,
  - б) использование формул сокращённого умножения,
  - в) способ группировки.
3. **Чтобы разложить многочлен на множители вынесением общего множителя за скобки, нужно:**
  - а) найти этот общий множитель,
  - б) вынести его за скобки,
  - в) каждое слагаемое многочлена разделить на этот множитель, полученные результаты сложить и записать результат в скобках.

$$3ca + 2cx - cy = c(3a + 2x - y)$$

4. **Формулы сокращенного умножения:**

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

5. **Разложение по формулам сокращенного умножения:**

$$4b^2 - 9c^2 = (2b)^2 - (3c)^2 = (2b - 3c)(2b + 3c)$$
$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = (2x + 3y)^2$$

## **Практические задания**

1. Разложить на множители вынесением общего множителя за скобки

- |              |                         |
|--------------|-------------------------|
| • $ax - ay$  | • $a^4b^2 - ab^3$       |
| • $9ac + 9c$ | • $4b^2 + 8ab - 12a^2b$ |
| • $x - xy$   | • $a(m+n) + b(m+n)$     |

2. Воспользоваться формулами сокращенного умножения

Разложить на множители

- $25x^2 - 9$
- $(a+b)^2 - c^2$
- $x^2y^4 - 16$
- $9a^2 + 6a + 1$
- $1 - 12b + 36b^2$

Выполнить умножение

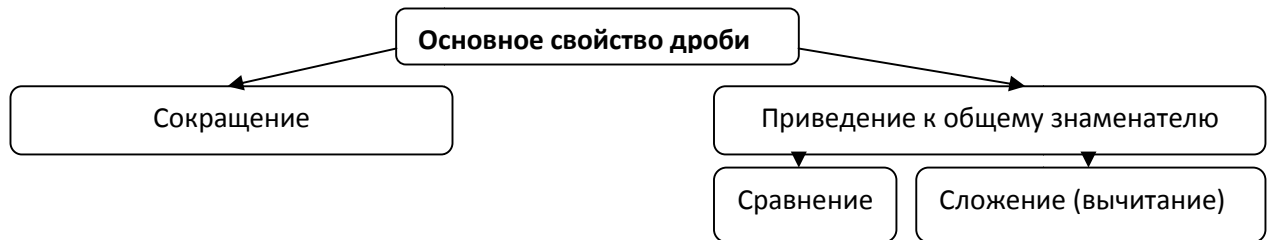
- $(2b - a)(2b + a)$
- $(2m^2 + 5n^3)(2m^2 - 5n^3)$
- $(x + 1)^2$
- $(6a - 4b)^2$
- $(5y + c)^2$

Вычислить

- $48 \cdot 52$
- $47^2 - 37^2$
- $(90 - 1)^2$
- $72^2$

## Тема: Алгебраические дроби.

**Основное свойство дроби:**  $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$  где  $b, d \neq 0$ .



Сложение (вычитание)	Умножение	Деление	Степень
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

### Практические задания

- Найдите область определения дроби:  $\frac{5}{(x+1)(2x-6)}$
- Сократите дробь: а)  $\frac{-14c}{49c^2}$ ; б)  $\frac{3a^4b}{ab^3}$ ; в)  $\frac{(a-2)^2}{a^2-4}$ ; г)  $\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}$ ; д)  $\frac{p^2-2p}{p^2-4p+4}$ .
- Выполните сложение и вычитание дробей: а)  $\frac{2}{3a} + \frac{1}{a}$ ; б)  $\frac{1}{a+1} - a$ ; в)  $\frac{2}{c} - \frac{3}{c^2}$

$\frac{b}{1-b^2} - \frac{1}{1-b};$	$\frac{2z}{4-3z} - \frac{6z^2+8z}{16-9z^2};$	<i>Решение.</i> г) $\frac{2z}{4-3z} - \frac{6z^2+8z}{16-9z^2} = \frac{2z}{4-3z} - \frac{6z^2+8z}{(4-3z)(4+3z)} =$ $= \frac{2z(4+3z) - (6z^2+8z)}{16-9z^2} = \frac{8z+6z^2-6z^2-8z}{16-9z^2} = 0$
$\frac{2a}{a^2-9} + \frac{1}{a-3};$	$\frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{a(a+b)};$	
$\frac{1}{6+c} + \frac{c}{36-c^2};$	$\frac{2}{k(k-2)} - \frac{2}{k^2-4}.$	

- Выполните умножение и деление дробей: а)  $\frac{2a}{3b} \cdot 6c$ ; б)  $\frac{3a^2}{5b} : \frac{2a}{10c}$ .

$\frac{2-a}{p+q} \cdot \frac{p+q}{a-2};$	$\frac{a^2}{b} \cdot \frac{ab-b}{a};$	$\frac{1}{a+b} \cdot (a^2+2ab+b^2);$	$\frac{1-b^2}{4a+8b} \cdot \frac{a^2+4ab+4b^2}{5-5b^2};$
$\frac{2b}{m-n} \cdot \frac{m-n}{6};$	$\frac{xy-y^2}{16} : \frac{y^2}{8x};$	$\frac{x^2-25}{x^2+6x+9} \cdot \frac{x+3}{x-5};$	$\frac{2(p^2+q^2)}{3(p+q)^2} : \frac{p^2+q^2}{(p+q)^3};$
$\frac{x+y}{x-y} : \frac{1}{x^2-y^2};$	$\frac{a-b}{c+d} : \frac{3(b-a)}{2(d+c)}.$	$\frac{x^2-10x+25}{4x-12} : \frac{2x-10}{x-3};$	$\frac{5m-10n}{m-5} : \frac{m-2n}{m^2-25}.$

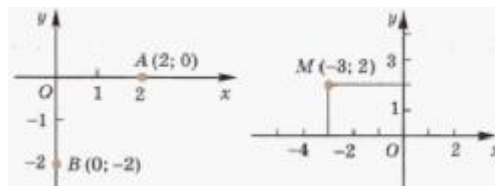
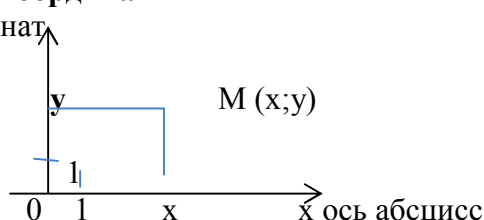
*Решение.*

$$\frac{1-b^2}{4a+8b} \cdot \frac{a^2+4ab+4b^2}{5-5b^2} = \frac{(1-b^2)(a+2b)^2}{4(a+2b) \cdot 5(1-b^2)} = \frac{1}{20}(a+2b).$$

## Тема: Линейная функция и ее график.

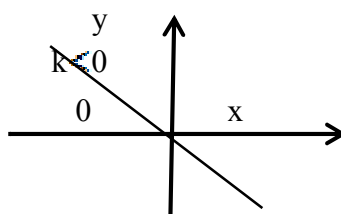
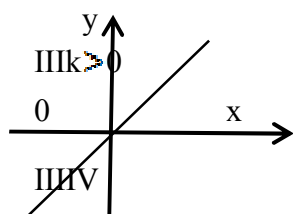
### 1. Система координат

ось ординат



$x$  и  $y$  – координаты точки  $M$  ( $x$  – абсцисса,  $y$  – ордината).

2. **Линейной функцией** называется функция вида  $y = kx + b$ , (где  $k; b$  – числа).
3. **Графиком** линейной функции является прямая. (Число  $k$  в формуле «отвечает» за наклон прямой, число  $b$  указывает на точку пересечения графика с осью  $OY$ )
4. **Способы задания линейной функции:** а) формулой; б) таблицей; в) графически
5. **Графиком функции  $y = kx$  ( $b = 0$ )** является прямая, проходящая через начало координат. Если  $k > 0$ , то график расположен в I и III координатных четвертях; если  $k < 0$ , то во II и IV.

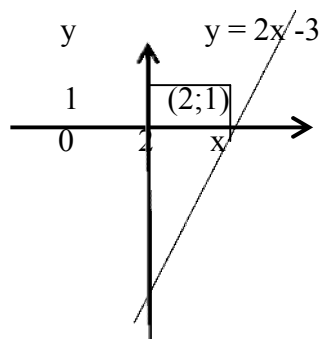


6. **Чтобы построить график** линейной функции нужно задать две точки.  $x$  – координата задается произвольным образом,  $y$  – координата вычисляется по заданной формуле.

$$y = 2x - 3 \quad y(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3 \quad y(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

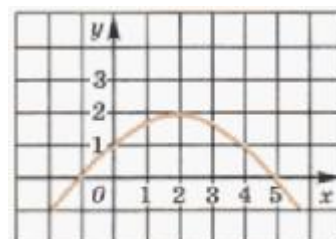
$x$	0	2
$y$	-3	1

-3 (0;-3)



### Практические задания

1. Построить треугольник по координатам его вершин:  $K(-2; 2)$ ,  $M(3; 2)$ ,  $N(-1; 0)$ .
2. Даны координаты вершин  $A(1; 2)$ ,  $B(4; 2)$ ,  $C(4; 5)$  квадрата  $ABCD$ . Постройте этот квадрат. Найти координаты точки  $D$ .
3. Функция задана формулой  $y = 2x - 1$ .
  - 1) Вычислить значение  $y(10)$ ,  $y(-5)$ ,  $y(0)$ .
  - 2) Найти значение  $x$ , если  $y(x) = -19$ ;  $y(x) = 1$ .
4. Функция  $y(x)$  задана графиком:
  - 1) Найти  $y(0)$ ,  $y(2)$ ,  $y(-1)$ ;
  - 2) При каком значении  $x$  значение функции равно 1, 2, 0.



3) Запишите несколько значений  $x$ , при которых значение функции положительно.

5. Дана функция  $y = x^2 - 5x + 6$ . Выяснить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами:

а)  $(1; 2)$ ; б)  $(-2; 0)$ .

6. Построить график функции, найти её точки пересечения с осями координат, указать по графику несколько значений  $x$ , при котором значение функции отрицательно.

а)  $y = 4x$ ; б)  $y = -4x$ ; в)  $y = 4$ ; г)  $y = 4x + 2$ ; д)  $y = \frac{1}{4}x - 2$ .

### Тема: Системы двух уравнений с двумя неизвестными.

#### Методы решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными.

1) Метод сложения:

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ -3x + 2y = -1 \end{cases} \cdot 2 \quad \begin{cases} 4x + 2y = 6, \\ -3x + 2y = -1 \end{cases} \begin{matrix} (-) \\ (-) \end{matrix} \begin{cases} 7x = 7 \\ 2y - 3x = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ 2y - 3 \cdot 1 = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases}$$

Если, после выравнивания коэффициентов знаки перед ними одинаковые, уравнения в системе вычитаются, если разные – складываются.

$$- \begin{Bmatrix} - \\ - \end{Bmatrix}; \quad - \begin{Bmatrix} + \\ + \end{Bmatrix}; \quad + \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix}; \quad + \begin{Bmatrix} - \\ + \end{Bmatrix}.$$

2) Метод подстановки:

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ -3x + 2y = -1 \end{cases} \begin{cases} y = -2x + 3, \\ -3x + 2(-2x + 3) = -1 \end{cases} \begin{cases} y = -2x + 3, \\ -3x - 4x + 6 = -1 \end{cases} \begin{cases} y = -2x + 3, \\ -7x = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \cdot 1 + 3, \\ x = 1 \end{cases} \begin{cases} y = 1, \\ x = 1 \end{cases}$$

#### Практические задания

1. Решить системы уравнений:  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = -4 \end{cases}$ ;  $\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$

2. Решить задачу, составив систему уравнений:

В поход пошла группа туристов на 9 байдарках, состоящая из 23 человек. Часть байдарок была двухместные, а часть - трехместные. Сколько было двухместных и сколько трехместных байдарок?